Cinématique du mouvement keplerien

Par hclatom@gmail.com

Résumé : une propriété cinématique simple produit le mouvement keplerien. Un mobile dont la vitesse est la somme d'une vitesse de rotation et d'une vitesse de translation, toutes deux de module constant, suivra une trajectoire conique respectant les 3 lois de Kepler. Cette propriété cinématique est cohérente avec la loi de la gravitation de Newton. De plus elle donne une équation analytique de la vitesse, ce qui manquait à la description newtonienne. Ceci permet, pour la première fois, de résoudre d'importants problèmes concernant la gravitation.

Cinématique et lois de Kepler

Montrons que les trois lois de Kepler sont respectées par un mobile dont la vitesse est la somme d'une vitesse de rotation et d'une vitesse de translation, toutes deux de module constant. Mathématiquement la vitesse d'un tel mobile s'écrira :

$$\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\wedge\mathbf{r}+\mathbf{v_T}=\mathbf{v_R}+\mathbf{v_T} \quad \text{avec} \quad v_R=\omega r=\text{cste} \quad \text{et} \quad \mathbf{v_T}=\mathbf{cste} \qquad (1)$$

Le moment angulaire est alors donné par $\mathbf{L}=\mathbf{r}\wedge\mathbf{v}=r^2\boldsymbol{\omega}+\mathbf{r}\wedge\mathbf{v_T}$. Multipliant, scalairement, cette relation par la fréquence de rotation $\boldsymbol{\omega}$, on obtient :

$$p=r(1+e\cos\theta) \quad \text{avec} \quad p=L/v_R \quad \text{et} \quad e=v_T/v_R \qquad (2)$$

où θ est l'angle formé par les directions des vecteurs $\mathbf{v_R}$ et $\mathbf{v_T}$.

Cette équation est celle d'une conique si p, le paramètre, et e, l'excentricité, sont tous deux constant. Grâce à l'équation (1) nous voyons que e est en effet constant, mais p ne l'est que si L l'est aussi. Pour qu'il en soit ainsi il est nécessaire que le rayon vecteur et l'accélération soient colinéaires. C'est bien ce qui dérive de (1), car l'accélération doit valoir, à cause de la constance de v_R et v_T :

$$\boldsymbol{\gamma}=\frac{-L\,v_R}{r^3}\,\mathbf{r} \qquad (3)$$

Ainsi l'accélération et le rayon sont colinéaires, ce qui impose au moment cinétique L d'être constant.

Finalement, nous voyons qu'un mobile respectant la relation (1) possède une trajectoire conique respectant la première loi de Kepler. Incidemment nous constatons qu'il s'accorde aussi avec la loi de la gravitation de Newton (equation (3)) si $L\,v_R=GM$, où G est la constante de la gravitation et M la masse du corps central.

Mais un tel système doit aussi vérifier la seconde loi de Kepler, ou loi des aires, à cause de la constance de son moment angulaire[1] :

$$L=r^2\dot{\theta}=\text{cste} \qquad (4)$$

Enfin, puisque la seconde loi est vraie, son intégration par rapport au temps, sur une période T de révolution, pour une trajectoire elliptique mène à [2] :

$$\frac{L^2}{p} = L\,v_R = 4\,\pi^2\,\frac{a^3}{T^2} = GM \qquad (5)$$

où a est le demi grand axe de l'ellipse. C'est la troisième loi de Kepler.

Ici encore nous remarquons que la relation (1) est cohérente avec la loi de la gravitation de Newton, à condition de vérifier $L\,v_R = GM$.

Notons aussi un fait essentiel : la relation (1) est indépendante de la masse, et de toute autre caractéristique physique, du mobile. Ceci est cohérent avec le fait que les mouvements dans un champ de gravitation sont indépendant de la masse.

Enfin, il est intéressant de noter que la relation (1) s'accorde bien avec l'expression de l'énergie mécanique classique. En effet, en portant (1) au carré, on parvient à décrire l'énergie cinématique $E = \frac{1}{2}\,v^2 - \frac{L\,v_R}{r} = \frac{1}{2}\,v_R^2\left(e^2 - 1\right)$. Multipliant ce terme par la masse, on voit qu'on obtient directement l'expression de l'énergie mécanique $E_M = m\,E$, composée d'une partie cinétique $m\,v^2/2$, et d'une partie potentielle $-m\,L\,v_R/r$, qui est exactement un potentiel newtonien, si, une fois de plus, $L\,v_R = GM$. Puisque v_R est constante, l'énergie mécanique doit être, elle aussi, constante au cours du mouvement, ce qui est cohérent avec la mécanique classique.

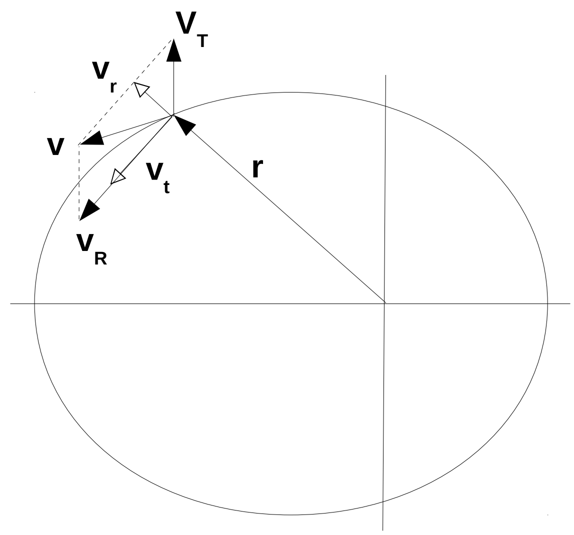
Une boîte à outils très utile

Ce que nous venons de décrire peut s'avérer très utile pour résoudre nombre de problèmes concernant les trajectoires kepleriennes. Nous allons en montrer deux exemples dans ce qui suit. L'avantage premier de l'approche cinématique est d'être basé sur la vitesse du mobile, alors que l'approche newtonienne se base sur son accélération et son rayon, et renâcle à donner une expression analytique de la vitesse. Ceci suggère que l'approche cinématique est complémentaire de l'approche classique.

Détermination instantanée de la conique

En partant de la relation (1), la seule connaissance du rayon $\mathbf{r}$ et de la vitesse $\mathbf{v}$, à un unique instant t, est suffisante pour déterminer la totalité de la trajectoire, sur une révolution complète, si tant est que nous connaissions la masse du corps central (voir fig.1). En effet le module du vecteur vitesse de rotation est donné par $v_R = GM/L$, avec $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{v}$. Par conséquent le paramètre de la conique sera donné par $p = GM/v_R^2$. Puisque le direction de $\mathbf{v_R}$ est perpendiculaire au rayon, ne devons vérifier $\mathbf{v_R} = v_R\,\frac{\mathbf{L} \wedge \mathbf{r}}{Lr}$, et $\mathbf{v_T}$ est donné par $\mathbf{v_T} = \mathbf{v} - \mathbf{v_R}$. Notez que $\mathbf{v_T}$ est toujours colinéaire au demi petit axe de la conique. Nous pouvons donc calculer l'excentricité $e = v_T/v_R$ et l'anomalie vraie $\theta = \mathrm{acos}\left(\frac{\mathbf{v_R} \cdot \mathbf{v_T}}{v_R\,v_T}\right)$. Ainsi nous possédons tout ce qu'il faut pour tracer toute la trajectoire.

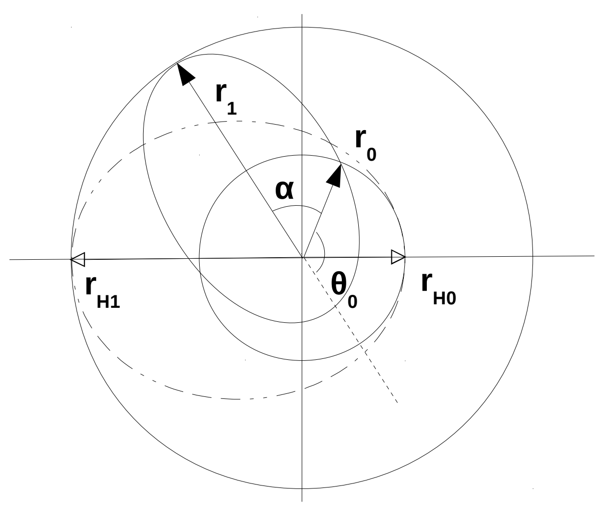
Fig. 1 : Les différentes vitesses sur une conique keplerienne. **v** *est la vitesse réelle. Elle peut être vue comme l'addition d'une vitesse de rotation* $\mathbf{v_R}$ *et d'une vitesse de translation* $\mathbf{v_T}$ *. Elle peut aussi être vue plus classiquement comme l'addition d'une vitesse radiale* $\mathbf{v_r}$ *et d'une vitesse tangentielle* $\mathbf{v_t}$ *.*



Transfert de Hohmann amélioré

Une autre utilisation pratique de la relation (1) est l'amélioration du transfert de Hohmann. Partant d'une orbite circulaire basse, pour rejoindre une orbite circulaire haute, Hohmann propose d'utiliser une orbite de transfert elliptique dont la périgée est située sur l'orbite basse, et l'apogée située sur l'orbite haute (voir fig.2). La limitation de ce genre de transfert est qu'il faut <u>absolument</u> partir de la périgée, et <u>forcément</u> aboutir à l'apogée. Cela a pour effet d'imposer une « fenêtre de tir » qu'on ne maîtrise pas. Ce n'est plus le cas avec la relation (1), grâce à laquelle cette contrainte est levée.

Fig. 2 : Trajectoires elliptiques de transfert entre deux orbites circulaires. L'orbite en pointillés est celle de Hohmann, débutant de la périgée $\mathbf{r_{H0}}$ *et finissant à l'apogée* $\mathbf{r_{H1}}$ *. L'orbite en trait plein est un exemple de transfert amélioré, débutant de n'importe quelle position* $\mathbf{r_0}$ *et finissant à n'importe quelle position* $\mathbf{r_1}$ *, qui est néanmoins l'apogée de l'orbite de transfert choisie.*



A partir de la fig.2, étant imposés $\mathbf{r_0}$ et $\mathbf{r_1}$, nous voyons que l'angle formé par ces deux vecteurs doit être donné par $\alpha = \mathrm{acos}\left(\frac{\mathbf{r_0} \cdot \mathbf{r_1}}{r_0 r_1}\right)$, alors l'anomalie vraie au point de départ sera $\theta_0 = \pi - \alpha$. Et puisque le transfert doit se terminer à l'apogée, on a $\theta_1 = \pi$. Il est alors possible de calculer l'excentricité de l'ellipse de transfert, $e=\dfrac{(\frac{r_1}{r_0})-1}{\cos\theta_0+(\frac{r_1}{r_0})}$, son paramètre, $p=r_1/(1-e)$, le module de la vitesse de rotation, $v_R=\sqrt{GM/p}$, et le module de la vitesse de translation, $v_T=e\,v_R$. Le vecteur vitesse de translation $\mathbf{v_T}$ devant toujours être colinéaire au demi petit axe, tout au long de la trajectoire, est aussi toujours perpendiculaire au rayon final $\mathbf{r_1}$. Nous possédons donc tous les éléments nécessaires à calculer l'orbite de transfert.

Discussion

La possibilité de décrire la vitesse d'un mouvement keplerien par l'addition de deux autres vitesses a déjà été mentionnée, mais de façon non explicite[3]. Cette propriété n'était pas considéré comme structurelle pour le mouvement, mais plutôt comme une voie élégante pour tracer des holographes.

La façon dont nous l'utilisons ici est conceptuellement différente. A cause des lois de la géométrie, nous la considérons comme une propriété cinématique réelle et structurelle. Nous utilisons explicitement les vitesses pour opérer des calculs sur les orbites kepleriennes. L'avantage est de fournir des équations simples, mais nouvelles, et utiles dans nombre de problèmes gravitationnels. En effet l'équation newtonienne du mouvement est une équation différentielle liant l'accélération et le rayon. Elle est de ce fait incapable de donner une formulation analytique de la vitesse, sur n'importe quelle conique, à n'importe quel instant. Dans ce contexte la relation (1) apparaît comme un complément à la méthode de Newton : avec elle on maîtrise l'accélération et la position, et avec la cinématique on maîtrise la vitesse. Les deux exemples pratiques que nous avons proposés ici ont été choisis pour bien montrer tout l'avantage d'une telle approche. Ils peuvent être très utiles si, par exemple, un astéroïde exterminateur fonçait vers la Terre, et que nous le découvrions peu de temps avant l'impact. Avec les seules lois analytiques de Newton, nous ne pourrions rien faire pour l'intercepter, mais nous le pourrions en appliquant la relation (1).

Un point particulier est enfin à soulever. Puisque nous avons montré que l'accélération newtonienne (3) est la dérivée de la relation (1), nous pouvons considérer cette dernière comme un précurseur des propriétés géométrique du mouvement gravitationnel. En ce sens la relation (1) serait la raison structurelle sous-jacente de l'existence de la loi de Newton. Ce point de vue, purement spéculatif à l'heure actuelle, vaudrait la peine d'être exploré plus avant, ne serait-ce que pour démontrer qu'il est faux.

Quoi qu'il en soit, la relation (1) est fondamentale car elle est purement géométrique. Etymologiquement c'est un théorème, pas une théorie. Elle ne peut être ignorée si l'on souhaite donner une description complète du mouvement keplerien.

Remerciements
Merci au Professeur Emmanuel Trélat, dont les remarques furent cruciales pour écrire cet article.

Bibliographie

[1] Mécanique, Landau & Lifchitz, Ed. Mir, Moscou, 1966, §14
[2] Mecanique, Landau & Lifchitz, Ed. Mir, Moscou, 1966, §15
[3] An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics, Revised Edition, Richard H.

Battin, §3.5, p126