

Étude cinématique

Par hclatom@gmail.com

Nous étudions les propriétés cinématiques d'un système dont la vitesse est la somme d'une vitesse de rotation et d'une vitesse de translation.

Cas Général

- La vitesse du système est $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} + \mathbf{v}_T = \mathbf{v}_R + \mathbf{v}_T$ (1).
- Le moment cinématique est $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{v} = r^2 \boldsymbol{\omega} + \mathbf{r} \wedge \mathbf{v}_T$. Par suite $\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega} = L \omega = v_R^2 (1 + e \cos \theta)$ où $e = v_T / v_R$ et θ est l'angle entre les directions du rayon vecteur et du rayon vecteur de périégée. Soit : $p = L / v_R = r (1 + e \cos \theta)$ (2), où p est le paramètre de l'ellipse.
- L'équation (1) impose aussi que $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_T = r \dot{r}$. Par suite on vérifie $\dot{r} = v_T \sin \theta$ (3).
- Puisque $L = r^2 \dot{\theta}$ on doit aussi vérifier $\omega = \dot{\theta} / (1 + e \cos \theta)$ (4).
- L'accélération vaut $\boldsymbol{\gamma} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v} + \boldsymbol{\gamma}_T = -\omega^2 \mathbf{r} + [\dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_T + \boldsymbol{\gamma}_T]$ (5).
- La dérivée du moment cinématique par rapport au temps est $\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \wedge \boldsymbol{\gamma}$, soit, grâce à (5) :
$$\dot{\mathbf{L}} = r^2 \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega} + \frac{\dot{r}}{r} + \frac{\boldsymbol{\gamma}_T \cdot \mathbf{v}_R}{v_R^2} \right) \boldsymbol{\omega}$$
 (6). Le moment est constant si cette dérivée est nulle.

Cas particulier si $\mathbf{v}_T = \mathbf{0}$

Alors $e = 0$, $\omega = \dot{\theta}$, $\dot{r} = 0$, $L / v_R = r_0 = r = \text{cste}$, l'orbite est circulaire et parcourue à vitesse uniformément constante.

Cas particulier si $\mathbf{v}_T = \text{cste}$ et $\mathbf{L} = \text{cste}$

La seule solution pour que $\mathbf{L} = \text{cste}$ est donnée par l'intégration de la relation (6), soit $\omega r = v_R = \text{cste}$. Dans ce cas l'orbite est une conique keplerienne car $e = v_T / v_R$ est une constante.

Lois de Kepler

Ce qui suit est directement issu de *Mécanique*, L. Landau et E. Lifchitz, Ed. Mir, Moscou, 1966, §14 et §15.

L'équation (2) est celle d'une ellipse si L, v_R et e sont des constantes, c'est la première loi de Kepler.

La seconde loi de Kepler, ou loi des aires, découle directement de la constance du moment cinétique : $L = \dot{\theta} r^2 = \text{cste}$. Le terme de droite est le double de la vitesse aréolaire $\dot{f}$ telle que $\dot{f} = \dot{\theta} r^2 / 2$. Pendant des intervalles de temps égaux le rayon vecteur d'un point mobile balaye des aires égales.

La troisième loi découle de la seconde par intégration sur une période T de révolution : $\int_T L dt = TL = 2f$. f est alors la surface balayée pendant une période de révolution. Pour une

ellipse elle vaut πab , où a est le demi grand axe de l'ellipse et b le demi petit axe. Si e est le paramètre de l'ellipse, et e son excentricité on doit avoir $a = p / (1 - e^2)$ et $b = p / \sqrt{1 - e^2}$, soit

$b = \sqrt{ap}$, et $\pi ab = \pi \sqrt{a^3 p}$. Finalement on doit donc vérifier $\frac{L^2}{p} = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}$. Rapprochant

ce résultat de l'équation (2) on voit que $L v_R = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} = k = \text{cste}$. Cela signifie que le cube du

demi grand axe est proportionnel au carré de la période de révolution, c'est la troisième loi de Kepler. Newton a proposé que la constante k soit le produit de la constante de gravitation G et de la masse M du corps central à l'orbite, on obtient donc $L v_R = GM$.